浜松医科大学紀要　一般教育　第１号(1987)

行列式の基本性質について

伊　藤　善　彦
(数　学)

A Remark on the Essential Properties of Determinants

Yoshihiko ITO
Mathematics

Abstract. Let K be a commutative ring. For each $n\times n$ matrix $A=(a_{ij})$ over K, we define the determinant $d(A)$ by the formula

$$d(A)=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)a(\sigma),$$

where the sum is taken over the set S_n of all permutations σ of $\{1,2,\cdots,n\}$, $\varepsilon(\sigma)$ is the sign of the permutation, and

$$a(\sigma)=a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

Assume $n\geqq 2$, and let τ be a transposition in S_n. The mapping $r_\tau : S_n\to S_n$ by the formula $r_\tau(\sigma)=\sigma\tau$ for each $\sigma\in S_n$ is a bijection. Then it is clear that the following theorem holds :

Theorem. $d(A)=\sum_{\sigma}(\, a(\sigma)-a(\sigma\tau)\,)$,

where the sum is taken over the set A_n of all even permutations σ.

In this paper, we will show that next two essential theorems B_2 and C_1 can be derived from our theorem.

Theorem B_2. Interchanging two rows of A multiplies $d(A)$ by -1.

Theorem C_1. If A has two rows alike, then $d(A)=0$.

キーワード：行列式の基本性質

近年，計算機の普及により，数式の計算においてともすると，その途中経過が軽視されがちである。まして，出来合いのソフト等を使用するときはなおさらのことである。そこで，一般教養としての数学を教育する場においては，とくにそのような弊害を除去することに心がけね

ばならない。この小論においては，そのことを行列式の基本性質の証明に例をとって述べてみたい。

1．Kを任意の可換環とする。K上の n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の行列式 $d(A)$ は，多くの場合，その歴史的動機にしたがって

$$d(A)=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)a(\sigma) \qquad (※)$$

で定義する。ここに，σ は n 文字の置換であり，$\varepsilon(\sigma)$ は σ の符号で，σ が偶置換ならば $+1$，奇置換ならば -1 とする。また，

$$a(\sigma)=a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}=\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

さらに，Σ は $n!$ 個の置換 σ のすべてについてとった総和である。

定義式(※)から通常，行列式の6つの基本性質が導かれるが，ここではその中次の2つの性質に注目する。

定理 B_2[1] 行列式の任意の2つの行を入れかえたものは，もとの行列式の符号を変えたものに等しい。

定理 C_1 行列式の任意の2つの行が相等しければ，この行列式は0に等しい。

定理 C_1 は定理 B_2 の直接の結果として導かれる場合が多い。すなわち，2つの行が相等しい行列を A とし，その相等しい2つの行を入れかえたものを A′ とする。定理 B_2 より，$d(A')=-d(A)$ であるが，$A'=A$ であるから，$d(A)=-d(A)$。したがって，$d(A)=0$ となる。しかし，この証明には2つの難点がある。1つは，行列式の概念を数体から一般の体（とくに，標数が2の体）にまで拡張したときには，上の証明では正しくない。次に，上の証明は行列式の定義式(※)の内容にあまりにも無頓着のように感ぜられる。定理 C_1 は，上の証明のように，ある種の理論の結果として行列式の〝値〞が0になるのではない。実際，具体例について見れば分かるように，その値は2つずつの項が相殺し合って，0を $n!/2$ 個加えたものとして0となるのである。

例えば，$n=3$ で，第1行と第3行が等しいとき，

$$\begin{aligned} d(A)&=(a_{11}a_{22}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{11})+(a_{12}a_{23}a_{11}-a_{11}a_{23}a_{12})+(a_{13}a_{21}a_{12}-a_{12}a_{21}a_{13}) \\ &=0+0+0=0 \end{aligned}$$

さらに，行列式を交代多重線形写像(*alternating multilinear mapping*)として定義する[2]ときは，定理 B_2 よりはむしろ定理 C_1 を優先してその定義に採用する場合もあり，そのときは，定理 B_2 は定理 C_1 から導かれる1つの結果となるのである。

2．本小論では，大学初級学年において，行列式について講義する際，行列式の定義式(※)に準拠しつつ，これら定理 B_2 と定理 C_1 を対等に扱う方法について述べる。上の例からも分かる

ように，$n \geqq 2$ のとき，行列式における $n!$ 個の項を2つずつ組合わせて考えることにする。$n \geqq 2$ とし，n 次の対称群を S_n で表す。τ を S_n の1つの互換として，S_n の各元 σ を S_n の元 $\sigma\tau$ に写す写像は S_n 上の1対1対応であるから，次の定理が成り立つのは明らかである。

定理　行列式の定義式(※)は，任意の互換 τ によって次のように表せる。

$$d(A)=\sum_{\sigma}(\,a(\sigma)-a(\sigma\tau)\,)$$

ここに，$\sum$ は $n!/2$ 個の偶置換 σ のすべてについてとった総和である。

この定理から，定理 B_2 と定理 C_1 は次のように得られる。

定理 B_2 の証明：行列Aの第 λ 行と第 μ 行を入れかえて得られる行列を $B=(b_{ij})$ とする。$b_{i\sigma(i)}$ は λ と μ の互換 τ によって，次のように表される。

$$b_{i\sigma(i)}=a_{i\sigma\tau(i)}$$

従って，定理より

$$\begin{aligned} d(B)&=\sum_{\sigma}(\,b(\sigma)-b(\sigma\tau)\,)\\ &=\sum_{\sigma}(\,a(\sigma\tau)-a(\,(\sigma\tau)\tau)\,)\\ &=\sum_{\sigma}(\,a(\sigma\tau)-a(\sigma)\,)\\ &=-d(A) \end{aligned}$$

定理 C_1 の証明：第 λ 行と第 μ 行が等しい行列をAとすると，λ と μ の互換を τ とするとき，

$$\begin{aligned} &i\neq\lambda,\ \mu\text{ のとき，}\ \sigma\tau(i)=\sigma(i)\\ &i=\lambda\quad\text{ のとき，}\ \sigma\tau(\lambda)=\sigma(\mu)\\ &i=\mu\quad\text{ のとき，}\ \sigma\tau(\mu)=\sigma(\lambda)\\ &\therefore\ a(\sigma\tau)=a(\sigma) \end{aligned}$$

従って，定理より

$$d(A)=\sum_{\sigma}0=0$$

なお，Birkhoff-MacLane[(3)] および伊藤[(4)]でも，定理 C_1 をこれと類似の方法で証明している。

注

1．定理 B_2，定理 C_1 は藤原松三郎[1]の第７章§7.7にならって付した。

文　献

1．藤原松三郎，代数学，第一巻，内田老鶴圃，昭和２年．
2．Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965. Ch. XIII，§4.
3．Garret Birkhoff and Saunders MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, 3rd ed. Macmillan, 1965. Ch. X，§1.
4．伊藤善彦，現代数学の基礎，杉山書店，昭和57年．第II章§4.4.

昭和62年２月28日受理